

Методи за анализ и метрологичен контрол на часовниците на GPS приемници

Петър Ковачев
НИИТГ – БАН
pkov@abv.bg

Резюме: В статията са представени няколко ефективни статистически техники, като част от теоретичната обосновка на разработван специализиран софтуер за тестване на GPS приемници. Освен при анализа и метрологичния контрол на часовниците на GPS приемници разгледаните дисперсии могат да бъдат използвани при обработката на временни редове в редица области от геофизиката, геодезията, военното дело, телекомуникациите, високоточната навигация и др.

1. Въведение

GNSS (Global Navigation Satellite System) технологиите вече станаха незаменен фактор в много области, като: навигацията на всички видове превозни средства, телекомуникационните системи, мрежите за мобилна комуникация, геодезията, геофизиката, военното дело и редица други области, които се нуждаят от поддържането на високоточни скали за време и пространствени координати. Високоточните геодезически двучестотни GPS приемници вече рутинно се използват за получаването на пространствено-временни кординати с точност под 1 cm при едnodневно усредняване в глобален мащаб, например продуктите на IGS (International GNSS Service). Поради огромния пазар тези технологии непрекъснато се усъвършенстват, като тенденцията е към преминаване от статични към кинематични измервания в реално или почти реално време. DGPS/RTK (Differential GPS/Real Time Kinematic) метода позволява да се намалят разходите за конкретен проект с до 80 %, както и многократно да се намали времето за осъществяването му [1].

Коректното решаване на фазовата неопределеност е ключът към високоточното позициониране в реално време. За решаването на този проблем производителите на GPS оборудване използват различен дизайн на хардуера на приемниците и антените както и различни функционални и стохастични модели. Поради конкуренцията между фирмите тези техники са патентно защитени и недобре описани. Различните подходи затрудняват и работата по въвеждането на общи стандарти в тази област, включително и за предаването на диференциалните поправки.

За постигане на максимална точност и по-голяма надеждност на измерванията е необходимо да се познават качествата и поведението на приемниците при различни неблагоприятни условия на наблюдение (блокиране на сигналите от сгради и

дървета, наличието на отазяващи електромагнитните вълни повърхности, източници на заглушаващи сигнали). Това налага периодично тестване на приемниците, за да се осигури: вътрешен контрол на качеството на приемника и антената; подобряване на точността, достигана от този приемник; легализиране (узаконяване) на метрологичните му характеристики. Във връзка с това се повишава нуждата от разработването на подходяща методика, стандарти и софтуер за тестване на приемниците и легализиране на измерванията. Огромният обем от данни налага максимално да се автоматизира процеса на извличане, филтрация (предварителна обработка), визуализация и статистически анализ на параметрите на решението. Параметрите на решението включват: координатите на точките, параметрите на часовника на приемника, координати на геоцентъра, UT1(Universal Time), координати на полюса, тропосферно закъснение ZTD (Zenith Total Delay), йоносферна концентрация на свободните електрони (TEC) и параметрите на геофизичните модели (ако са включени в обработващия софтуер) на приливите в земната кора, пренос на маси в атмосферата, океаните и континентални водоизточници.

Стандартните грешки в GPS фазовите и кодовите данни са съответно от порядъка на 1 cm и 1 m съответно, като се очаква отразените сигнали да бъдат доминиращ източник на грешки и в двата случая.

Официално получените грешки на часовниците на геодезическите GPS приемници са от порядъка на 120 ps (3.6 cm), но беше показано, че в много случаи тези резултати са твърде оптимистични. По-надеждно определяне на действителната точност може да се осъществи с помощта на класически тест за повтаряемост на резултатите, сравнявайки съгласуваността в границите на последователно обработваните дъги. Такъв тест е правдоподобен, ако стабилността на съответния часовник е достатъчна, което фактически ограничава неговото използване до GPS приемниците, екипирани с външни стандарти за честота (водородни мазери, рубидиеви и цезиеви стандарти).

Анализът на временни редове от перманентни GPS станции показва, че точността на синхронизация силно зависи от мястото на измерване, варира в широки граници от станция към станция и зависи от избора на GPS приемници и антени. В много случаи несъвпадения в измерванията или внезапни резки промени могат да се проследят до промени в екипировката или инсталационни проблеми като загуба на връзка, дължаща се на кабелни прекъсвания или лошо разпределение на честотата от външен източник.

Някои перманентни станции показват ясни сезонни вариации с нива на несъгласуваност, които не могат да бъдат напълно обяснени с термични ефекти. Все пак в най-добрите случаи нарушенията в непрекъснатостта на резултатите са в границите на очакваната грешка. Стабилността на най-съвременните геодезически техники за синхронизация на часовниците е в границите на: $2 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$ за времена на усредняване τ до 1 ден и съответства на шумовия процес "случайно блуждаене" (random walk process). Разширяването на границите на метода над 1 ден ще изисква измерванията да се правят с по-прецизни стандарти за честота.

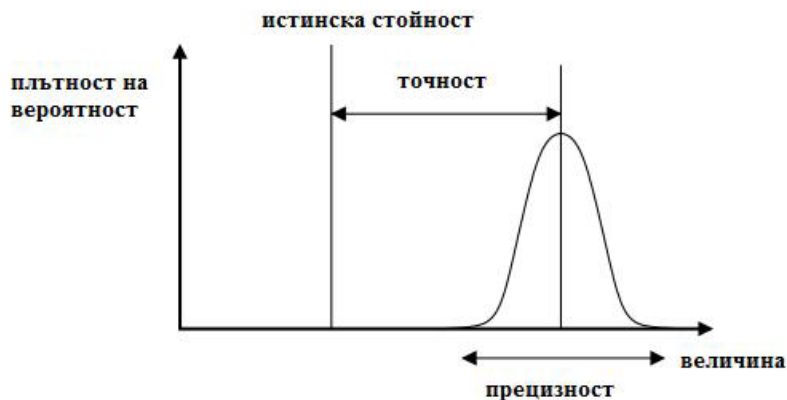
Точността на синхронизация зависи от качеството на получените данни. По тази причина, за да се постигне висока точност, е необходимо да се спазват редица изисквания, отнасящи се към точките, на които се инсталират антените на приемниците, и към останалата екипировка, за да се избегнат грешките от отразени сигнали.

Качеството на приемниците варира в широки граници по отношение на чувствителността им към термичните ефекти и поради тази причина е необходим контрол на приемниците за промените в температурата. Също така е необходимо използването на фазово стабилни свързващи кабели с ниска чувствителност към температурните промени, максимално къси и минимално изложени на външни влияния. Не се изисква термичен контрол на антените [2], [3], [4], но те трябва да бъдат поставяни на места изключващи в максимална степен възможността за приемане на отразени сигнали.

Влияние на точността на измерванията могат да окажат и отразени сигнали от долната част на антената с по-голяма дължина на вълната [5]. В близко бъдеще, с въвеждането на нови сигнали в GNSS системите се очаква значително редуциране на влиянието на отразените сигнали.

2. Грешки в честотно-временния тракт на GNSS приемника

Всеки стандарт за време и честота (високоточен часовник), генериращ честота ν_0 , генерира и смущения и грешки, имащи не само случаен, но и систематичен характер. За описанието на отклоненията на характеристиките на реалния стандарт от предполагаемите идеални характеристики се използват понятията *точност*, *прецизност* и *стабилност* (Фиг. 1).



Фиг. 1 Точност, прецизност и стабилност

Точността е мярка за способността на стандарта да генерира честота, съотношението на която с идеалната ν_0 е известно възможно най-точно. Тази способност може да бъде оценена само чрез щателно изследване на всички възможни смущаващи ефекти. Всяко потенциално отместване от предполагаемата номинална величина ν_0 се нарича *отклонение*. Резултатите от изследването на всички отклонения и техните неопределености обикновено се описва в *списък на грешките*, а комбинацията от неопределеностите на отклоненията и съответстващите им тежести представлява оценка, наричана *точностна характеристика* на изследвания стандарт. Под *прецизност* (*разсейване*) се разбира степента на съгласуваност на

данните със средната стойност на извадката, а под *стабилност* - степента на изменение на измерваната величина във функция на определени параметри като време, температура, вибрации, удари, радиация и др. Във временната област може да бъде описана с дисперсията на ред от измервания, разглеждан като временен ред. Разработени са статистически модели и методи за анализ, [6], отчитащи типа на флукуационните спектри, дължината на отделните извадки и “мъртвото време” между измерванията. За изследването на честотните флукуации на източника на стандартна честота могат да се използват методи на анализ както в *честотната*, така и във *временната област*. Изборът на областта става от практически съображения. Честотният анализ с помощта на спектроанализатори е най-удобен при изследването на бързи флукуации (период от време < 1 s, т.е. честоти на Фурие > 1 Hz). Анализът във временната област (т.е. определянето на дисперсиите и стандартните отклонения във функция от временната извадка) е най-подходящ при изследването на бавни флукуации. Съществува и промеждутъчен диапазон, където е възможно използването и на двата метода [7].

За да се определи псевдоразстоянието между спътника и приемника, часовникът на приемника трябва да се синхронизира с възможно най-висока точност с часовника на спътника. Часовниците на спътниците са високочестотни рубидиеви и цезиеви стандарти. Всеки спътник от Блок II/IIA съдържа два цезиеви и два рубидиеви атомни часовника. Всеки спътник от Блок IIR съдържа три рубидиеви атомни часовника. Часовниците на приемниците са евтини кварцови генератори. Преди процеса на синхронизация със спътника системното време на приемника се поддържа от броячи, отброяващи циклите, генерирани от кварцовия осцилатор [8].

Едва след като приемникът захване първия спътник се извършва синхронизация на скалата за време на приемника със скалата за време на спътника. Тук следва кратко пояснение: навигационното съобщение се декодира както от C/A – кода, така и от P – кода, с които е модулирана носещата честота L1. То се състои от отделни подкадри (subframes), съдържащи данни за ефемеридите на спътниците, корекциите на часовниците им и състоянието на конфигурацията от спътници. Всеки подкадр съдържа и времето на излъчване на следващия подкадр в секунди от началото на текущата GPS седмица. Едва след като е записан и декодиран първият подкадр приемникът може да извърши приблизителна синхронизация с GPS - времето, като изчисли приблизителното отместване (receiver clock offset) на вътрешната си скала за време спрямо скалата за време на спътника. Това приблизително определяне става, като се отчете времето на излъчване на подкадра и приблизителното време на разпространение на сигнала от спътника до приемника (доколкото точните координати на приемника още не са известни). С това отместване се реинициализира броячът на секундите на часовника на приемника. Тази първоначална синхронизация към GPS - времето е известна като груба синхронизация по време (coarse time set) [9]. След като бъдат захванати достатъчен брой спътници (> 4) и се определят точните координати на антената се извършва по-точно пресмятане на отместването на часовника на приемника спрямо GPS времето. Това отместване се използва, за да се синхронизира вътрешният часовник колкото се може по-точно към системната GPS скала за време. Тази процедура е известна като фина синхронизация (fine time set). Точността, с която може да бъде определено отместването на скалата за време на приемника спрямо системното GPS време, или с други думи степента, с която могат да бъдат компенсирани всички грешки по трасето на разпространение на сигналите

от спътника до приемника, е от изключителна важност при решаването на навигационната задача.

Използването на евтини кварцови осцилатори в GPS приемниците не е критично от гледна точка на синхронизацията им с GPS времето, тъй като отместването на часовника се получава от навигационното решение, но по-стабилен вътрешен осцилатор винаги дава предимство по отношение на точността на решението и надеждността (reliability) на резултата особено при неблагоприятни условия на измерване.

Точното познаване на хода и другите метрологични характеристики на вътрешния часовник дава възможност за предвиждане на отместването на вътрешната скала за време и получаването на адекватно решение за известен период от време, дори и при наличието на само три видими спътника [10]. Определените параметри на часовника в период с повече спътници и добра геометрия (добър GDOP - Geometric Dilution of Precision) (геометричен фактор за загуба на точност) могат да се използват след това в период с лоша геометрия на спътниците [11].

Дори и при повече видими спътници, по-стабилният осцилатор осигурява по-добро решение от гледна точка на точността, достъпността до системата (availability) и надеждността (reliability).

Когато към GPS приемника се включи високостабилен часовник (цезиев или рубидиев стандарт), вертикалната точност и достъпността до системата (availability) се подобряват значително [12]. Модел с използването на полином от втора степен също може да се използва за предвиждане на отклонението на часовника [13]. Доказано е, че използването на външни атомни стандарти подобрява интегритета на приемника (RAIM availability) [14].

От изследването на характеристиките на часовниците на GPS приемниците могат да се направят следните изводи [15]:

- Грешката във вертикалния компонент е почти линейно корелирана с грешката в отместването на часовника. Колкото по-голям е VDOP, толкова по-корелирани са двете грешки.
- Хоризонталните грешки са почти независими от грешката на часовника, когато геометрията на спътниците е добра. Колкото е по-лоша геометрията на спътниците, толкова тези две грешки са по-корелирани с грешката на часовника.
- Високостабилен часовник, използван от приемника, подобрява вертикалния компонент на решението. При лоша геометрия на спътниците могат да бъдат подобрени и хоризонталните компоненти.

В диференциален режим грешката на часовника на подвижния приемник може да се раздели на две части – грешката на часовника на базовата станция и грешката при синхронизацията със системното GPS време. Първата част на тази грешка е от същия порядък както грешката при определянето на координатите в DGPS режима. Това е случаят, когато часовникът на референтната станция вече е синхронизиран с GPS времето. Отместването на часовника на подвижния приемник ще зависи от TDOP (Time Dilution of Precision) и от дисперсията на грешките в коригираните псевдо-разстояния. Втората част от грешката зависи от начина на синхронизация на референтната станция с GPS времето (1-D или 4-D решение). Грешките на оценките на отместването на часовника при 4-D решението, т.е. оценките при обикновеното

позициониране на единична станция, са породени (директно) от грешките при измерването на псевдоразстоянията, които произтичат от грешките на Селективния достъп (Selective Availability errors-когато е включен), йоносферните и тропосферните грешки, ефемеридните грешки, грешките в часовниците на спътниците и др. При 1-D метода оценките за отместването на часовника се получават на референтната станция, която привежда средната стойност на поправките за всички спътници към нула (допуска се, че средната стойност на всички грешки клони към нула). Грешките на измерванията на псевдоразстоянията се усредняват. 1-D решението е по-добро от това в 4-D, ако WGS-84 координатите на референтната станция са известни с достатъчна точност.

С развитието на технологиите през последните няколко години изключително се повиши стабилността на термостабилизирани кварцови осцилатори (ОСХО - Oven Controlled Crystal Oscillator, ДОСХО – Double Oven Controlled Crystal Oscillator). По своите характеристики те почти достигнаха тези на по-старите рубидиевите стандарти за време и честота. Постигнати са и сериозни успехи в миниатюризацията им. За да използваме тези нови възможности при прецизното определяне на положението в реално време с GPS, се налага щателно изследване на метрологичните характеристики на часовника на конкретния приемник. Това ще ни даде възможност да прогнозираме поведението на часовника за по-продължителни периоди от време, което е особено важно при навигационните приложения и при GPS системите за мониторинг на деформации.

3. Метрология на часовниците

Основен фактор, определящ точността на формиране на скалите за време и тяхната синхронизация в различните радиотехнически системи, е нестабилността на честотата на задаващите генератори [16]. Ще разгледаме накратко основните характеристики на честотата, влияещи на точността на формираните скали за време.

Интервалът от време, формиран от сигналите на задаващия генератор, може да бъде представен с:

$$T(t) = \frac{1}{f_0} \int_0^t f(\tau) dt,$$

където f_0 е номиналната стойност на генератора, а $f(\tau)$ е истинската стойност на честотата на генератора.

Поради различни причини истинската стойност на честотата на генератора се отличава от номиналната стойност $f(\tau) = f_0 + \Delta f(\tau)$ и формираната скала за време не съвпада с истинската:

$$T(t) = t + \int_0^t \frac{\Delta f(\tau)}{f_0} d\tau = t + \Delta T(t),$$

където $\Delta T(t)$ е грешката (отклонението) на формираната скала за време.

Като ефективен модел, описващ относителното отклонение на истинската стойност на честотата на генератора от номиналната стойност, широко се използва изразът:

$$\Delta f(t)/f = \Delta f(t)/f_0 + \beta(t) + \gamma(t) + \nu(t),$$

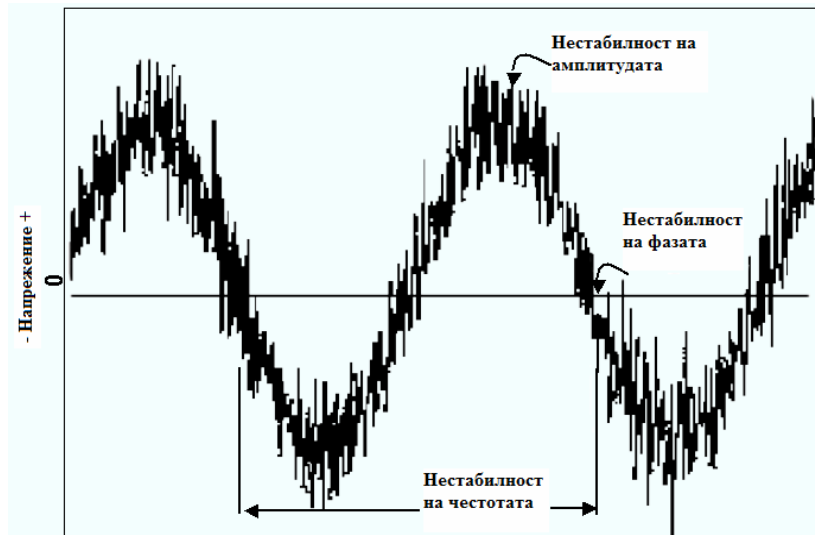
където $\Delta f(t)/f_0$ е началното относително отклонение на истинската стойност на честотата на генератора; $\beta(t)$ е коефициент, характеризиращ систематическото изменение на истинската стойност на честотата на генератора във времето; $\gamma(t)$ е случайното изменение на честотата, обусловено от процеси в самия генератор, а $\nu(t)$ е изменението на честотата, причинено от влиянието на външната среда – температура, атмосферно налягане, механически въздействия, магнитно поле и радиация.

Систематичното изменение на честотата $\beta(t)$ е най-голямо при кварцовите генератори (с каквито са оборудвани повечето GPS приемници). При тях, в зависимост от качеството им то е от порядъка на 10^{-7} до 10^{-10} за ден. При това $\beta(t)$ зависи от времето за предварителна температурна стабилизация на генератора. То за различните генератори е от порядъка на два часа до няколко дена непрекъсната работа на генератора (развитието на технологиите в последните години сведе това време до минути и секунди), след което $\beta(t)$ става практически постоянен. Квантовите стандарти на честота се характеризират с незначително изменение на честотата ($< 5 \cdot 10^{-11}$ на месец, поради това при тях $\beta(t)$ обикновено е константна величина.

Изменението на честотата на генераторите, причинено от факторите на външната среда, се описва с нелинейни функции и отчитането им обикновено е затруднено. На практика се приемат специални мерки за отстраняване на влиянието на тези фактори. Затова можем да приемем, че $\nu(t) = 0$, а възможното остатъчно влияние да разглеждаме като случайно изменение на честотата.

Мигновеното изходно напрежение на генератора може да се опише с:

$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)]\sin[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$, където V_0 и ν_0 са съответно номиналната амплитуда и честота, а $\varepsilon(t)$ и $\phi(t)$ са отклоненията на амплитудата и честотата от номиналните им стойности (Фиг. 2).



Фиг. 2 Амплитудна, фазова и честотна нестабилност на генератора

Обикновено измененията на номиналната амплитуда $\varepsilon(t)$ са пренебрежимо малки и за анализа на стабилността на честотата от съществено значение е $\phi(t)$.

Мигновената стойност на честотата се дефинира с:

$$\nu(t) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$$

Тогава *относителното мигново отклонение на честотата* от номиналната се определя като:

$$y(t) = \frac{\Delta f}{f} = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

където $x(t) = \phi(t)/2\pi\nu_0$.

В практиката основно съществуват два подхода (във временната и честотната област) при дефинирането на относителна мярка за стабилността на честотата на изследвания генератор.

Анализ на стабилността на генератора във временната област

Във временната област анализът на стабилността на източника на честота се определя от променливите $x(t)$ и $y(t)$, т.е. фазата (изразена в единици за време) и относителната честота $\Delta f / f$ (безразмерна величина) съответно. Анализират се масивите с данни x_i и y_i , където i означава точки от данните, равномерно отместени във времето.

Колебанията на $x(t)$ са свързани с колебанията на фазата чрез:

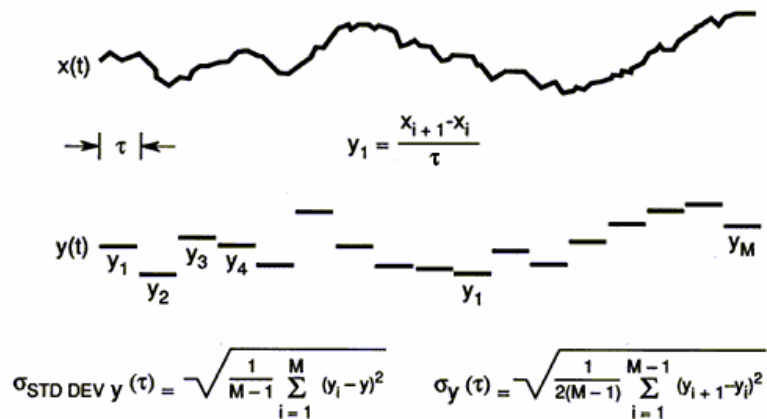
$$\phi(t) = x(t) \cdot 2\pi\nu_0,$$

където ν_0 е номиналната носеща честота в Hz, а $x(t)$ и $\phi(t)$ обикновено наричаме “фаза”, за да ги разграничим от независимата временна променлива t .

Периодът на дискретизация (data sampling) или интервалът на измерване означаваме с τ_0 [s]. Периодът на измерване или усредняване (analysis or averaging time) е: $\tau = m\tau_0$, където m е коефициентът на усредняване (averaging factor, τ се среща в литературата още като sample time или averaging time (време на усредняване) (Фиг. 3).

Целта на анализа на стабилността на честотата във временната област е да даде сбито, но пълно количествено и стандартизирано описание на фазата и честотата на източника, включващо номиналните стойности, отклоненията от тези стойности и тяхната зависимост от времето и околната среда.

Могат да бъдат анализирани както стохастичните (шума), така и детерминистичните свойства на тествания източник. Освен това предполагаме, че стохастичните характеристики на източника са константни (стационарни във времето и ергодични за популацията). [Ергодични случайни процеси – възникват, когато отделен член от ансамбъла се държи, така както и целият ансамбъл. Условието за ергодичност се отнася само за стационарните процеси. Не всеки стационарен процес е ергодичен. Случайни процеси, които не удовлетворяват това свойство, се явяват неергодични процеси.]



Фиг. 3 Представяне на данните

Анализът може да покаже, че това не е вярно и в този случай данните трябва да бъдат разделени на части, за да бъде изпълнено горното условие и да се получат смислени резултати.

Често е най-добре да бъдат определени и отстранени детерминистичните фактори (дрейфът на честотата и отклоненията, дължащи се на температурни промени) преди да бъдат анализирани шумовете.

Въздействията, дължащи се на измененята в околната среда, най-често се елиминират чрез тестови изпитания в лабораторни условия или чрез специални апаратни решения. По тази причина обикновено се подразбира, че тези инструментални ефекти са пренебрежимо малки или са отстранени от данните.

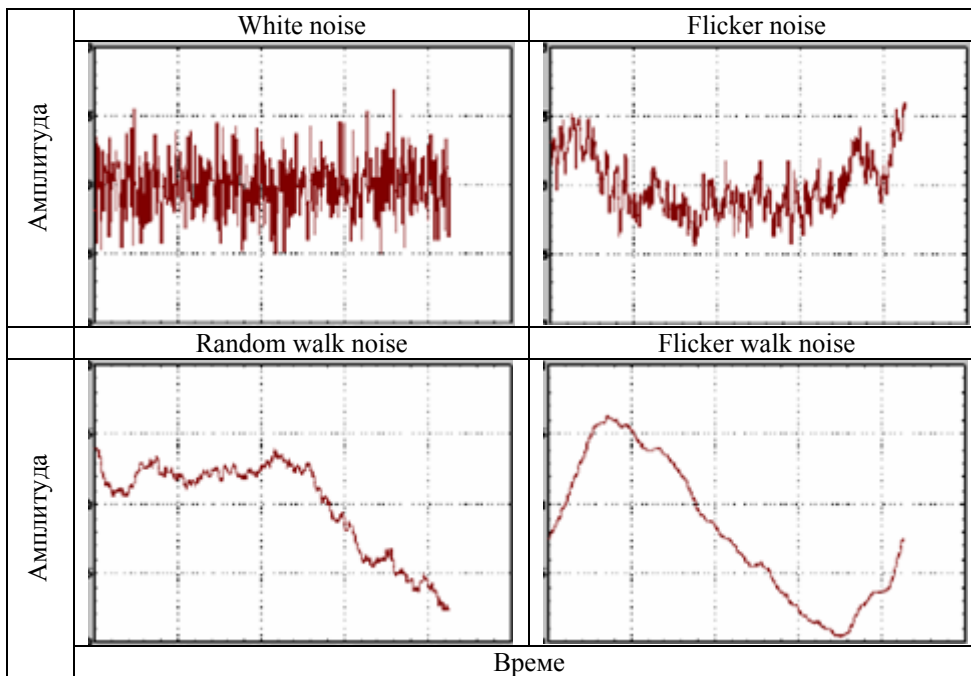
Често срещан проблем е да се определи възможно най-дългото време на усредняване на данните, за да се минимизира продължителността, а с това и разходите за теста. Времето за анализ обикновено не е от съществено значение, освен когато той трябва да бъде проведен в реално време.

Перфектният генератор би имал константна стойност на честотата, еквивалентна на единична спектрална линия. На практика това е невъзможно да се осъществи, затова нестабилността на повечето източници на честота може да бъде моделирана чрез комбинация от различните на шумове в генератора: бял фазов шум (*white PM noise*), бял честотен шум (*white FM noise*), трептене на фазата (*flicker PM noise* (шум със спектрална плътност $1/f$ (фликер шум))), трептене на честотата (*flicker FM noise*), случайно блуждаене на честотата (*random walk noise* "Брауново движение") (Фиг.4).

Влиянието на различните на шумове в генератора може да бъде сведено до достатъчно реалистичен модел, който описва *спектралната плътност* $S_y(f)$ с първите членове от степенния ред:

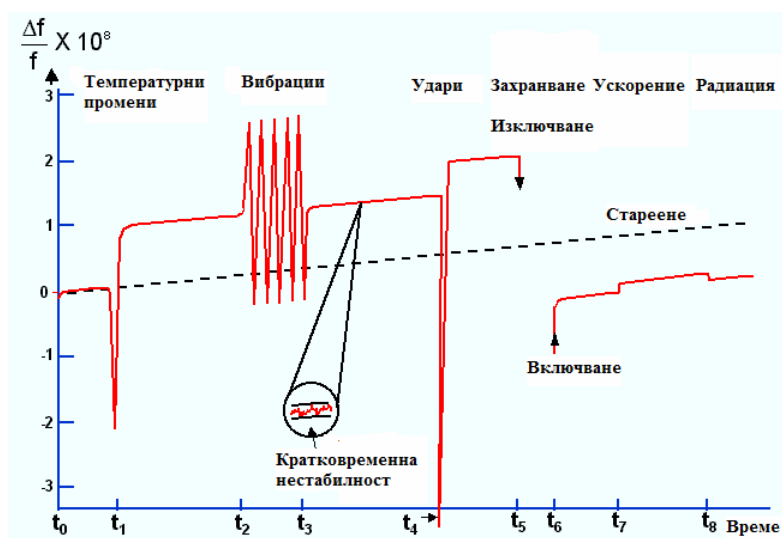
$$S_y(f) = h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0 + h_1f^1 + h_2f^2$$

при $0 \leq f \leq f_h$ и $S_y(f) = 0$ при $f > f_h$, като при това f_h – горната граница на честотата на Фурие трябва да е приемлива и за съответния измервателен прибор.



Фиг. 4 Различни видове шумове, генерирани от източника на честота

Идеализирана схема на процесите в генератора, които пораждат тези шумове е представен на Фиг. 5.



Фиг. 5 Процеси, влияещи на стабилността на генератора

За този модел от *честотната област* съществува проста връзка с *временната област* [17].

За всеки член на $S_y(f)$ от вида $h_\alpha f^\alpha$, съответстващата дисперсия $\sigma_y^2(\tau)$ е пропорционална на τ^μ , като

$$\begin{aligned} \mu &= -\alpha - 1 & \text{за} & \quad -3 < \alpha < 1 \text{ и} \\ \mu &= -2 & \text{за} & \quad 1 \leq \alpha . \end{aligned}$$

В повечето случаи в реалния генератор присъстват няколко различни процеса, създаващи шумове, водещи до появата на един или няколко члена от вида $h_\alpha f^\alpha$. Ако тези процеси са некорелирани, то сумарната (пълна) *спектрална плътност* и съответстващата дисперсия могат да бъдат получени с простото добавяне на членове.

α	Фаза	Честота	μ
-2	-	Случайно блуждаене (random walk)	1
-1	-	Трептене на честотата (flicker FM noise)	0
0	Случайно блуждаене (random walk)	Бял честотен шум (white FM noise)	-1
1	Трептене на фазата (flicker PM noise)	-	-2
2	Бял фазов шум (white PM noise)	-	-2

Таблица 1. Връзката между моделите от *честотната област* и *временната област*

Понякога се срещат и други типове шумове като *разходящ трепящ и случайно блуждаещ* (divergent flicker walk noise $\alpha = -3$) и *случайно пробягващ (преминаващ)* (random run noise $\alpha = -4$).

Пасивните атомни стандарти на честота обикновено се характеризират с бял FM шум, който се понижава до някакво ниво с квадратния корен от времето за усредняване, докато не бъде достигната област с трептене на честотата (flicker FM noise), често причинено от въздействието на обкръжаващата среда.

Източник	Кратковременна стабилност	Средновременна стабилност	Дълговременна стабилност
Кварцов генератор	White& Flicker PM	Flicker & Random walk FM	стареене
Рубидиев стандарт	White FM	Flicker FM	стареене
Цезиев стандарт	White FM	White FM	Flicker FM
Водороден мазер	White PM	White FM	Random walk FM и стареене
GPS часовник	White PM	Осцилации подобни на маховик	На GPS системата

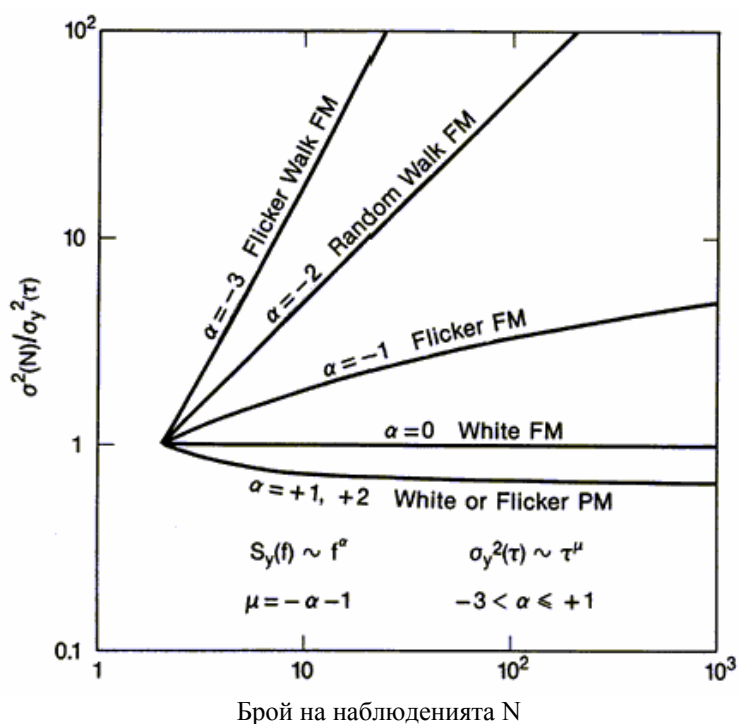
Таблица 2. Типичните шумове, генерирани от стандартите за време и честота

За оценка на нестабилността на честотата на генераторите се използват статистически методи. Най-често използван е централният момент от втори ред, характеризиращ разсейването около номиналната стойност, разделен на броя на измерванията $N - 1$ (*дисперсията* - variance):

$$\sigma^2(N) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

Резултатът често се представя като квадратен корен от дисперсията, т.е. *стандартното отклонение* (deviation).

За съжаление *стандартното отклонение* не клони към единична стойност за различните типове шумове в осцилатора, с изключение на белия честотен шум (white FM noise), с нарастването на броя на наблюденията.



Фиг. 6 Разходимост на шумовете с нарастването на броя на наблюденията

Поради тази причина бяха разработени следните дисперсии, на които дължината на данните не оказва влияние и които са лесно приложими за определяне на характера на случайните флуктуации в прецизните осцилатори [18], [19]:

Видове дисперсии

Видове дисперсии	Характеристики
Стандартна дисперсия $\sigma^2(N)$	Не е подходяща за някои от шумовете в часовника – да не се използва
Дисперсия на Алан (Allan variance) $\sigma_y^2(\tau)$ (AVAR)	Използва се само ако е необходимо – Ниска статистическата надеждност
Дисперсия на Алан със застъпване на данните (Overlapping Allan Variance) $\sigma_y^2(\tau)$ (OVAR)	Най-широко използвана – 1-ви избор за анализ на данните
Пълна дисперсия на Алан (Total Allan Variance) $\sigma_{total}^2(\tau)$ (TOTVAR)	По-висока статистическата надеждност за дълги периоди на усредняване
Модифицирана дисперсия на Алан (Modified Allan Variance) $\text{Mod } \sigma_y^2(\tau)$ (MVAR)	Използва се за да се разграничи белият фазов шум (<i>white PM noise</i>) от <i>трептенето на фазата</i> (<i>flicker PM noise</i>)
Пълна модифицирана дисперсия на Алан (Total Modified Variance) $\text{Mod } \sigma_{total}^2(\tau)$ (TOTMVAR)	По-висока статистическата надеждност за дълги периоди на усредняване
Временна дисперсия (Time Variance) $\sigma_x^2(\tau)$ (TVAR)	Равна на $(\tau^2/3) \cdot \text{Mod Allan variance}$
Пълна временна дисперсия (Total Time Variance) $\sigma_x^2 \text{ total}(\tau)$ (TOTTVAR)	Пълна версия на временната дисперсия
Дисперсия на Хадамард (Hadamard Variance) $H\sigma_y^2(\tau)$ (HVAR)	Отстранява дрейфа на честотата
Дисперсия на Хадамард със застъпване на данните (Overlapping Hadamard Variance) $H\sigma_y^2(\tau)$ (OHVAR)	По-висока статистическата надеждност в сравнение нормалната дисперсия на Хадамард
Пълна дисперсия на Хадамард (Total Hadamard Variance) $H_{total} \sigma_y^2(\tau)$ (TOTHVAR)	По-висока статистическата надеждност от дисперсията на Хадамард
Thèol	Осигурява анализ за цялата дължина на данните.

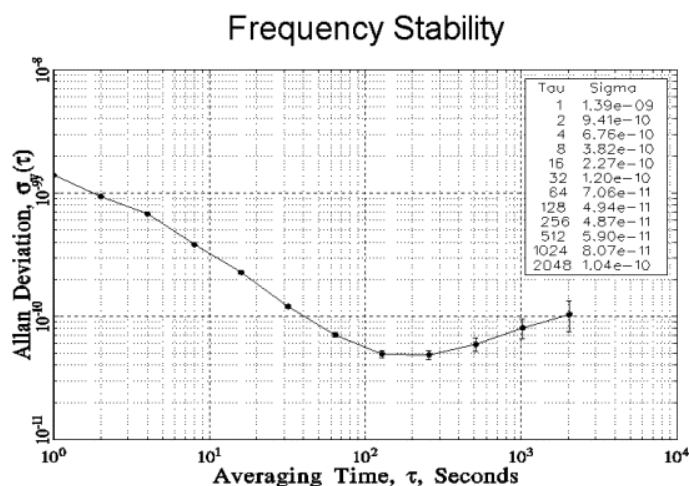
Таблица 3. Видове дисперсии – общи характеристики [20]

Дисперсия на Алан (Allan variance) AVAR

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{i=1}^{M-1} (y_{i+1} - y_i)^2 = \frac{1}{2(N-2)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-2} (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2$$

- Сходима за всички шумови процеси, наблюдавани в генераторите
- Има проста връзка със степенните компоненти на спектралната плътност.
- Лесна за изчисляване
- По-бърза и по-точна при определянето на шумовия процес от бързите Фурие трансформации (FFT).

На Фиг. 7 е показана графика на дисперсията на Алан в логаритмичен мащаб. От нея се вижда, че стабилността на генератора се подобрява с увеличаването на периода на усредняване τ , понеже по този начин се елиминират някои типове шумове. Но от определена точка нататък увеличаването на периода на усредняване не подобрява резултатите. Тази точка се нарича *праг на шума* (noise floor), а промяната на хоризонталния тренд говори за наличието на нестационарен шумов процес.



Фиг. 7 Дисперсия на Алан (логаритмична скала)

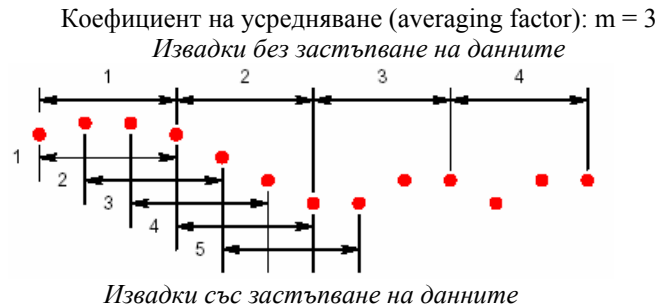
Дисперсиите на Адамар (Hadamard) HVAR бяха разработени, за да се получи добра сходимост за всички типове шумове на осцилатора и да се елиминира дрейфът на честотата.

$$H\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{6(M-2)} \sum_{i=1}^{M-2} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)^2 = \frac{1}{6(N-3)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-3} (x_{i+3} - 3x_{i+2} + 3x_{i+1} - x_i)^2$$

Тези дисперсии ни дават няколко ефективни статистически инструмента за анализ на нестабилността на изследваната честота (Таблица 3).

Извадки със застъпване на данните (overlapping)

Някои изследвания на стабилността на източника на честота могат да бъдат проведени с използването на извадки със застъпване на данните (Фиг. 8). Използването на застъпващи се извадки повишава статистическата надеждност с цената на увеличаване на времето за обработка. Тези извадки не са напълно независими, но въпреки това увеличават ефективния брой на степените на свобода и по този начин подобряват статистическа надеждност (statistical confidence) на резултата. Извадките със застъпване могат да се приложат при анализи с помощта на дисперсиите на Алан и Адамард. Пълните (total) дисперсии винаги ги използват.



Фиг. 8 Пример за извадки без и със застъпване на данните

Тогава формулата за дисперсията на Алан придобива вида:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2m^2(M-2m+1)} \sum_{j=1}^{M-2m+1} \sum_{i=j}^{j+m-1} (y_{i+m} - y_i)^2,$$

а формулата за дисперсията на Хадамард придобива вида:

$$H\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{6m^2(M-3m+1)} \sum_{j=1}^{M-3m+1} \sum_{i=j}^{j+m-1} (y_{i+2m} - 2y_{i+m} + y_i)^2$$

Модифицираната дисперсия на Алан (MVAR) дава възможност да бъде разграничен белият фазов шум (*white PM noise*) от *трептене на фазата (flicker PM noise)*, а съответните дисперсии със застъпване на данните (overlapping) или пълни (total – използващи всички възможни комбинации) дисперсии обезпечават по-голяма надеждност.

За честотните данни:

$$\text{Mod } \sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2m^4(M-3m+2)} \sum_{j=1}^{M-3m+2} \left\{ \sum_{i=j}^{j+m-1} \left(\sum_{k=i}^{i+m-1} [y_{k+m} - y_k] \right) \right\}^2,$$

а за данните за фазата:

$$\text{Mod } \sigma^2 y(\tau) = \frac{1}{2m^2 \tau^2 (N - 3m + 1)} \sum_{j=1}^{N-3m+1} \left\{ \sum_{i=j}^{j+m-1} [x_{i+2m} - 2x_{i+m} + x_i] \right\}^2.$$

Временна дисперсия (Time Variance) TVAR

$$\sigma_x^2(\tau) = (\tau^2/3) \text{Mod } \sigma^2 y(\tau)$$

Тази дисперсия е особено полезна при измерването на стабилността на мрежи, разпространяващи точно време. Обикновено се представя с квадратен корен от измерената стойност - $\sigma_x(\tau)$, TDEV.

Пълна временна дисперсия (Total Time Variance) TOTTVAR

$$\sigma_{x \text{ total}}^2(\tau) = (\tau^2/3) \text{Mod } \sigma^2 \text{total}(\tau)$$

Обикновено се представя с квадратен корен от измерената стойност - $\sigma_{x \text{ total}}(\tau)$.

Пълна дисперсия на Алан (Total Allan Variance) TOTAVAR

Прилага се при по-дълги времена на усредняване, когато стандартната дисперсия не работи поради симетричност на данните [21].

$$\sigma^2 \text{total}(\tau) = \frac{1}{2\tau^2 (N - 2)} \sum_{i=2}^{N-1} [x_{i-m}^{\bullet} - 2x_i^{\bullet} + x_{i+m}^{\bullet}]^2,$$

където $\tau = m\tau_0$ и N е броят на данните за фазата x_i , измерени при $\tau = \tau_0$, удължен чрез отражение в двете крайни точки и по този начин оформяйки виртуален ред x^* от $i = 3-N$ до $i = 2N-2$ с дължина $3N-4$. Оригиналните данни се разположени в центъра на x^* при $i = 1$ до N и $x^* = x$. "Отразените" точки се добавят от всяка страна, като реда се удължава от $j = 1$ до $N-2$, където:

$$x^*_{1-j} = 2x_1 - x_{1+j} \text{ и } x^*_{N+j} = 2x_N - x_{N-j}.$$

За данните за честотата TOTAVAR:

$$\sigma^2 \text{total}(\tau) = \frac{1}{2(M - 1)} \sum_{i=1}^{M-1} [y_{i+j+1}^{\bullet} - y_{i+j}^{\bullet}]^2,$$

където $M = N-1$ броя на данните за относителното изменение на честотата y за $\tau = \tau_0$ (N – броя на данните за фазата) е разширен чрез отражение в двата края, така че се създава виртуален ред y^* . Оригиналните данни се намират в центъра, като $y^*_1 = y_1$ за $i = 1$ to M , а разширените данни за $j = 1$ до $M-1$ се задават с

$$y^*_{1-j} = y_j, \text{ а } y^*_{M+1} = y_{M+1-j}.$$

Резултатите обикновено се представят като $\sigma_{\text{total}}(\tau)$, (total Allan deviation – TOTADEV). Очакваните резултати за TOTVAR са същите както за AVAR за white и flicker PM или за white FM шум. За flicker и random walk FM шум се въвеждат корекции от вида $1/[1-a(\tau/T)]$, където T е дължината на записа, а $a=0.481$ и 0.750 съответно [22].

Пълна модифицирана дисперсия на Алан (Total Modified Variance) TOTMVAR

Mod $\sigma_{\text{total}}^2(\tau)$ е нова статистика за анализ на стабилността на честотата. Тя е подобна на modified Allan variance (MVAR), но предлага по-добра статистическа надеждност (confidence) за по-дълги времена на усредняване. Също като MVAR успява да различи white и flicker PM шумов процес.

$$\text{Mod } \sigma_{\text{total}}^2(\tau) = \frac{1}{2(m\tau_0)^2(N-3m+1)} \sum_{n=1}^{N-3m+1} \left(\frac{1}{6m} \sum_{i=n-3m}^{n+3m-1} ({}^0 z_i^{\#}(m))^2 \right)$$

където ${}^0 z_i^{\#}(m)$ е средноаритметично от фазите на разширената последователност, а представката 0 показва, че линейният тренд е бил отстранен.

Пресмятането на TOTMVAR започва с масив от N фазови точки x_i с интервал на измерване τ_0 [s], които ще бъдат анализирани за период на усредняване $\tau = m\tau_0$. TOTMVAR се пресмята от серии от $N-3m+1$ последователности от точки с дължина $3m$. Първо се отстранява линейния тренд (frequency offset). Той се получава чрез усредняване на първата и втората половина от данните и разделяне на сумата от двете усреднени стойности наполовина. След това новополучената последователност се разширява в двата си края с неинвертирани равни отражения. След това за тези точки на брой $9m$ се изчислява modified Allan variance – MVAR. Накрая тези стъпки се повтарят за всяка от тези $N-3m+1$ на брой последователности, определяйки TOTMVAR като тяхното общо средно. Тези стъпки са показани на Диаграма 1. За максимално възможния усредняващ коефициент $m = N/3$ външният цикъл съдържа само един член, докато вътрешният има $6m$ члена, като по този начин се получава достатъчен брой оценки за дисперсията [23] (Диаграма 1).

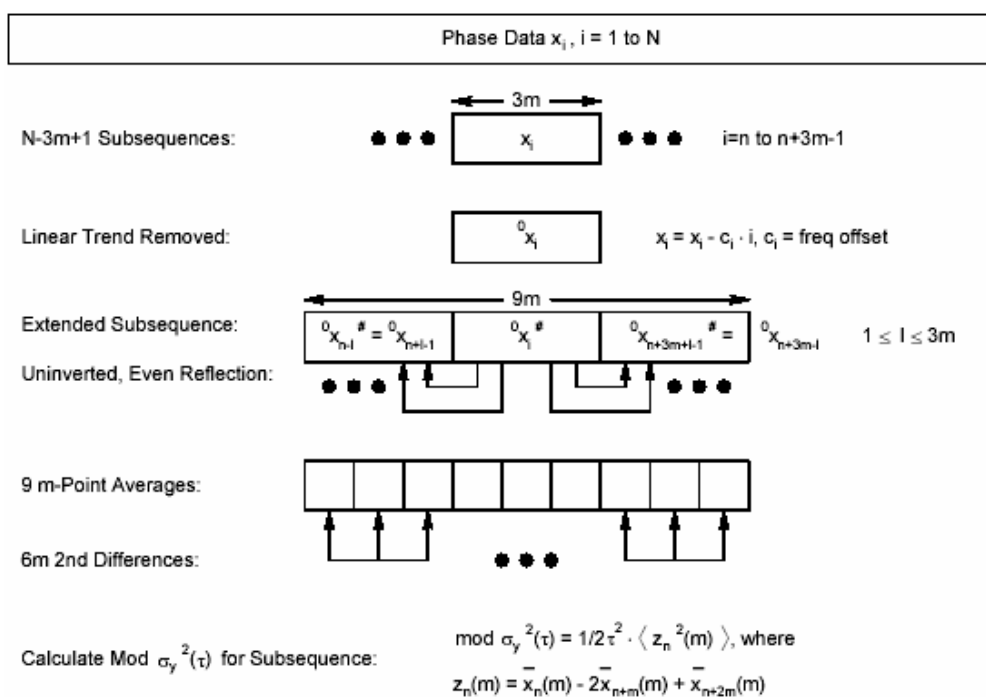
Пълна дисперсия на Адамард (Total Hadamard Variance) TOTHVAR

$H_{\text{total}}\sigma_y^2(\tau)$ е пълна версия на Hadamard variance, която отстранява линейния дрейф (ход) на честотата и предлага подобрена статистическата надеждност за дълги периоди на усредняване.

Алгоритъмът на TOTHVAR за поредица от N стойности на относителното изменение на честотата y_i за период на усредняване $\tau = m\tau_0$ е много подобен на използвания за TOTMVAR за фазовите данни:

1. Избираме последователност y_n с дължина $3m$ от данните y_i , $i=n, n+3m, \dots, n+3m-1$.
2. Отстраняваме линейния тренд от тази ред, получавайки $y_i^* = y_i - c \cdot i$, където c се получава от разликата на усреднената първа и последна половина от изследвания ред, разделена на интервала между двете.

3. Разширяваме последователността от данните в двата края с неинвертирани равни отражения (виж горната диаграма) и по този начин формираме ред от $9m$ точки $\#y_i$ с утроена дължина от $i=n-3m$ до $n+6m-1$. Разширеният ред може да бъде построен с израза $\#y_{n-k} = y_{n+k-1}^*$ и $\#y_{n+3m+k-1} = y_{n+3mk}^*$ за $k=1$ до $3m$.
4. Изчисляваме стандартната дисперсия на Хадамард Hadamard variance за този разширен ред чрез усредняването на всички $6m$ точкови последователности и намирането на квадратите на вторите им разлики.
5. Намираме TOTHVAR чрез просто усредняване на $N-3m$ – те HVAR оценки [24], [25].



Диаграма 1. Метод на двойното отражение

Thêol (Theoretical Variance #1)

Thêol (Theoretical Variance #1) е нова, все още разработвана статистика, която дава възможност за изследване на стабилността на честотата с използването на по-големи коефициенти на усредняване [26].

$$Thêol(m-1, \tau_0, N_x) = \frac{1}{(N_x - m)(m\tau_0)^2} \sum_{i=1}^{N_x - m} \sum_{\delta=-(m/2-1)}^{(m/2-1)} \frac{1}{(m/2 - \delta)} [(x_i - x_{i-\delta+m/2}) + (x_{i+m} - x_{i+\delta+m/2})]^2$$

Тêò1 осигурява полезна информация за извадки с коефициент на усредняване m , почти равен на пълната дължина на данните N_x ($m_{\max} = N_x - 1$).

Максималната грешка на изследвания интервал (maximum time interval error)

В телекомуникационната индустрия обикновено се използват за характеристика на нестабилността на часовниците *максималната грешка на изследвания интервал* МТИЕ (maximum time interval error) и *средната квадратна грека на изследвания интервал* ТИЕ (rms time interval error) [27], [28].

МТИЕ се определя като максималното отклонение на ”плъзгащ” се по данните за фазата прозорец от n точки ($n = \tau / \tau_0$) и намирането на разликата между максималната и минималната стойност за всяко положение на ”прозореца”. МТИЕ е най-големият максимум за целия временен ред [29].

$$MTIE(\tau) = \text{Max}_{1 \leq k \leq N-n} \{ \text{Max}_{k \leq i \leq k+n}(x_i) - \text{Min}_{k \leq i \leq k+n}(x_i) \},$$

където $n = 1, 2, \dots, N-1$ и $N =$ броя на фазовите данни.

МТИЕ е мярка за измерване на върховите стойности на отклонението на часовника и по тази причина е много чувствителна към наличието на единични екстремални стойности, краткотрайна нестабилност или груби грешки.

МТИЕ изисква значително време за обработка за големи масиви от данни [30].

Връзката между МТИЕ и *дисперсия на Алан* все още не е дефинирана окончателно, но е предмет на разглеждане в някои съвременни публикации [31], [32].

Поради ”пиковата” природа на МТИЕ е необходимо тя да бъде изразена чрез доверителната вероятност β , чиято определена стойност не трябва да бъде надхвърляна.

В случаите на *бял честотен шум* white FM noise (важни за пасивните атомни часовници, каквито са най-често употребяваните в практиката цезиеви и рубидиеви стандарти за време и честота) МТИЕ може да се апроксимира с израза:

$$MTIE(\tau, \beta) = k_{\beta} \sqrt{(h_0 \tau)} = k_{\beta} \sqrt{2 \cdot \sigma_y(\tau) \cdot \tau},$$

където k_{β} е константа, определяна според доверителната вероятност β от таблица 4, а h_0 е коефициентът на *спектрална плътност* $S_y(f)$ за *белия честотен шум* white FM noise.

$\beta, \%$	k_{β}
95	1.77
90	1.59
80	1.39

Таблица 4

Средна квадратна грека на изследвания интервал (rms time interval error) ТИЕ

ТИЕ често се употребява в телекомуникационната индустрия и се представя с:

$$TIE_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n} (x_{i+n} - x_i)^2},$$

където $n=1,2,\dots, N-1$, а N = броя на фазовите данни.

Ако няма отместване на честотата на осцилатора, ТИЕ е приблизително равно на стандартното отклонение на относителното изменение на честотата, умножено с времето на усредняване. Следователно тя е сходна по поведение с разгледаните дисперсии във временната област (TDEV), въпреки че последните са по-подходящи за анализа на различните типове шумове [33].

Общи бележки за различните видове дисперсии

- Всички дисперсии в таблица 4 са моменти от втори ред, определящи дисперсията или нестабилността на честотата спрямо номиналната.
- Всички са нормализирани към стандартното отклонение за белия честотен шум (white FM noise).
- Всички, с изключение на стандартното отклонение имат добра сходимост за основните видове шумове.
- Модифицираните дисперсии съдържат допълнителни усреднявания, които помагат да се разграничи белият от трептящия фазов шум.
- Дисперсиите във временната област се базират на модифицираните варианти.
- Дисперсиите на Хадамард са сходящи и за *разходящия трепящ и случайно преминаващ* (divergent flicker walk noise $\alpha = -3$) и *случайно пробягващия (преминаващ) шум* (random run noise $\alpha = -4$).
- Дисперсите със застъпване на данните имат по-висока статистическата надеждност от класическата дисперсия на Алан.
- Пълните дисперсии (Total variances) имат по-висока статистическата надеждност при по-дълги периоди на усредняване в сравнение с дисперсите със застъпване на данните.
- Thêol (Theoretical Variance #1) осигурява анализ за цялата дължина на данните.
- Пълните дисперсии изискват голямо изчислително време, особено ако се изследват резултатите от всички възможни времена на усредняване.

Обработка на данните за фазата и честотата

- Данните за фазата се предпочитат при обработката на измерванията, защото от тях могат да се получат данните за честотата, докато обратното не винаги е възможно. Абсолютната фаза не може да бъде реконструирана от данните за честотата, когато прекъсвания в тези данни означава загуба на непрекъснатост на фазата на сигнала.
- За фазовите данни може да бъде използвано по-дълго време на усредняване (или просто може да бъде извлечено всяко десето измерване, докато данните

за честотата трябва да бъдат усреднени, за да се постигне това, което води до увеличаване на времето за обработка). Обикновено обработката става по-бързо (понякога много по-бързо), ако конвертираме данните за честотата до данни за фазата, преди да извършим изследването за стабилността на източника на честота.

- Данните за фазата могат да се прилагат директно в приложенията за синхронизация на скали за време и са основни за системите, разпространяващи точно време.
- Данните за честотата често са по-лесни за анализ, грубите грешки са по-видими, може веднага да се забележи изменението на честотата и дрейфът ѝ е по-очевиден.
- Данните за честотата са по-фундаментални спрямо вътрешните характеристики на източника на честота.

4. Заключение

В следващата публикация ще бъде представено приложението на разгледаните дисперсии при анализа на данните от конкретни GPS приемници и алгоритмите използвани от разработвания специализиран софтуер за коректна интерпретация на резултатите.

Литература

- [1] Global Positioning System: Theory and Applications. Edited by B.W. Parkinson and J.J. Spilker Jr. Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. 1996.
- [2] Ray, J. R. & Senior, K., 2001. Temperature sensitivity of timing measurements using Dorne Margolin antennas, *GPS Solutions*, **5**, 24–30
- [3] Ray, J. R. & Senior, K., 2005. Geodetic techniques for time and frequency comparisons using GPS phase and code measurements, *Metrologia*, **42**, 215–232
- [4] Rieck, C., Jarlemark, P., Jaldehag, K., & Johansson, J., 2003. Thermal influence on the receiver chain of GPS carrier phase equipment for time and frequency transfer, in Proc. 2003 IEEE Int. Frequency Control Symp. and PDA Exhibition Jointly with the 17th European Frequency and Time Forum (Tampa, Florida, 5-8 May 2003), pp. 326–331
- [5] El'osegui, P., Davis, J. L., Jaldehag, R. T. K., Johansson, J. M., Niell, A. E., & Shapiro, I. I., 1995. Geodesy using the Global Positioning System: the effects of signal scattering on estimates of site position, *J. Geophys. Res.*, **100**, 9921–9934
- [6] Barnes J., Chi A., Cutler L., Healey D., Leeson D., McGunigal T., Mullen J., Smith W., Sydnor R., Vessot R., Winkler G., "Characterization of frequency stability", IEEE Trans. Instrum. Meas., vol IM-20, pp105-120, May 1971; също: NBS Tech. Note 394, Oct. 1970

- [7] Edmundo A. Marques Filho, Hélio Koiti Kuga, Roberto V. F. Lopes, REAL TIME ESTIMATION OF GPS RECEIVER CLOCK OFFSET BY THE KALMAN FILTER, Proceedings of COBEM, 2003, 17-th International Congress of Mechanical Engineering, November 10-14, 2003, Sao Paulo, SP
- [8] Kaplan, Elliot D., 1996, "Understanding GPS: principles and applications", Artech House, Inc., Norwood, MA, USA
- [9] Novatel Technical Bulletin, 1997, "Receiver Time, GPS Time, Clock Steering and the 1 PPS Strobe", Novatel OEM series APN-015 rev 1
- [10] Sturza, M.A. (1984), "GPS Navigation Using Three Satellites and a Precise Clock", Global Positioning System, Vol. ii, Washington, DC: The Institute of Navigation, pp. 122-132
- [11] McBurney, P.W. and Brown, R.G. (1988), "Receiver Clock Stability: An Important Aid in GPS Integrity Problem", Proc. ION National Technical Meeting, Santa Barbara, CA, 526 – 537
- [12] Murphy, J.J. and Skidmore, T.A. (1994), "A Low-cost Atomic Clock: Impact on the National Airspace and GNSS Availability", Proceeding of ION GPS-94, Salt Lake City, pp. 1329-1336
- [13] Misra, P., M. Pratt, B. Burk and R. Ferranti (1995a), "Adaptive Modeling of Receiver Clock for Meter-level DGPS Vertical Positioning", Proceeding of ION GPS-95, pp. 1127 – 1135
- [14] Lee, Y.C. (1993), "RAIM Availability for GPS Augment with Barometric Altimeter Aiding and Clock Coasting", Navigation, The Journal of ION, Vol. 40, No. 2, pp. 179-198.], [Misra, P., M. Pratt, R. Muchnik and B. Manganis (1995b), "A General RAIM Algorithm Based on Receiver Clock", Proc. ION GPS-95, 1941 – 1948
- [15] Zhaonian Zhang, Impact of Rubidium Clock Aiding on GPS Augmented Vehicular Navigation, UCGE Reports, Number 20112, THE UNIVERSITY OF CALGARY, Department of Geomatics Engineering, December 1997
- [16] Б. И. Лобойко, Оценка точности формирования шкал времени, Измерения времени и частоты, 389.14:529.781
- [17] Vessot R., Peters H., Vanier J., Beehler R., Halford D., Harrach R., Allan D., Glaze D., Snider C., Barnes J., Cutler L., Bodily L., "An intercomparison of hydrogen and cesium frequency standards", IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-15, pp.165-175, Dec. 1966
- [18] Y.-K. Yong and J. R. Vig, "Resonator Surface Contamination - A Cause of Frequency Fluctuations?," IEEE Tr. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., vol. UFFC-36, No. 4, pp. 452-458, July 1989
- [19] R. L. Filler, "The Acceleration Sensitivity of Quartz Crystal Oscillators: A Review," IEEE Tr. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., vol. UFFC-35, pp. 297-305, 1988
- [20] C. Greenhall and W. Riley, "Uncertainty of Stability Variances Based on Finite Differences", Proc. 2003 PTTI Meeting, December 2003
- [21] B. Percival and D.A. Howe, "Total Variance as an Exact Analysis of the Sample Variance", Proc. 1997 PTTI Meeting, Dec. 1997, pp.97-105

- [22] Howe and T. Pepler, "Definitions of Total Estimators of Common Time-Domain Variances", *Proc. 2001 Intl. Freq. Cont. Symp.*, June 2001, pp. 127-132
- [23] D.A. Howe and F. Vernotte, "Generalization of the Total Variance Approach to the Modified Allan Variance", *Proc. 31st PTTI Meeting*, December 1999, pp. 267-276
- [24] D.A. Howe, et al., "A Total Estimator of the Hadamard Function Used For GPS Operations", *Proc. 32nd PTTI Meeting*, Nov. 29, 2000, pp. 255-268
- [25] D.A. Howe, R.L. Beard, C.A. Greenhall, F. Vernotte, W.J. Riley and T.K. Pepler, "Enhancements to GPS Operations and Clock Evaluations Using a "Total" Hadamard Deviation", *IEEE Trans. UFFC*, Vol. 52, No. 8, August 2005
- [26] D.A. Howe and T.K. Pepler, "Estimation of Very Long-Term Frequency Stability Using a Special-Purpose Statistic", *Proceedings of the 2003 IEEE International Frequency Control Symposium*, May 2003
- [27] Bregni S., "Clock Stability Characterization and Measurement in Telecommunications", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. IM-46, No. 6, pp. 1284-1294, Dec. 1997
- [28] Zampetti G., "Synopsis of Timing Measurement Techniques Used in Telecommunications", *Proc. 24th PTTI Meeting*, pp. 313-326, Dec. 1992
- [29] Travella P. and D. Meo, "The Range Covered by a Clock Error in the Case of White FM", *Proc. 30th Annu. PTTI Meeting*, pp. 49-60, Dec. 1998
- [30] S. Bregni and S. Maccabrini, "Fast Computation of Maximum Time Interval Error by Binary Decomposition", *IEEE Trans. I&M*, Vol. 49, No. 6, Dec. 2000, pp. 1240-1244
- [31] Tavella, A. Godone & S. Leschiutta, "The Range Covered by a Random Process and the New Definition of MTIE", *Proc. 28th PTTI Meeting*, Dec. 1996, pp. 119-124
- [32] P. Tavella and D. Meo, "The Range Covered by a Clock Error in the Case of White FM", *Proc. 30th PTTI Meeting*, Dec. 1998
- [33] S. Bregni, "Clock Stability Characterization and Measurement in Telecommunications", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 46, No. 6, pp. 1284-1294, Dec. 1997